Ciò posto, se l'espressione *Udu* -f- *V ài) è* un differenziale esatto, è lecito prendere T= i; e reciprocamente, se il fattore T che produce *Uàu*-|- *Fdv = Td®* può esser fatto uguale ad i, quell'espressione è un differenziale esatto. Ora al valore T = i del fattore (quando questo valore è ammissibile), corrisponde una forma op della funzione **<£>** per la quale si ha

sen 6 = sr9.

Possiamo dunque dire che : *affinchè le rette del sistema sieno normali ad una superficie è necessario e sufficiente che le curve tracciate nella superficie iniziale ortogonalmente alle rette stesse, possano essere distribuite in modo che il loro parametro differenziale eguagli in ogni punto il seno dell'angolo che la retta corrispondente fa colia normale alla superficie.*

Richiamandoci in mente la relazione fra due sistemi di rette, derivati l'uno dall'altro nel modo esposto all'art. Ili, possiamo formulare nel modo che segue la loro dipendenza geometrica :

Le rette del sistema primitivo e di uno qualunque dei sistemi derivati sono incontrate ortogonalmente da una medesima serie di curve tracciate sulla superficie iniziale.

Il rapporto dei seni degli angoli che due rette corrispondenti fanno colla normale a questa superficie nel punto comune, e costante in tutti i punti di una di queste trajettorie e varia soltanto da una traiettoria all'altra.

Rammentiamo che questa seconda proprietà e una conseguenza *necessaria* della prima, ammesso che i due sistemi debbano essere normali a due superficie.

Reciprocamente se due sistemi sono connessi da queste due relazioni e se le rette dell'ano sono normali ad una superficie, anche quelle dell'altro sono dotate della stessa proprietà.

Se la superficie iniziale si considera come limite di un mezzo *eterogeneo,* è chiaro che l'indice di rifrangibilità, variabile da un punto all'altro di questa superficie, sarà costante lungo certe linee tracciate in essa : possiamo quindi formulare il seguente teorema, che è una nuova generalizzazione di quello di MALUS-DUPIN.

Se un fascio di raggi luminosi, normali ad una superficie, si rifrange alla superficie di un me%(p eterogeneo, la condizione necessaria e sufficiente affinchè i raggi rifratti sieno pure normali ad ima superficie e che le linee lungo le qitali è costante l'indice di rifrangibilità incontrino ortogonalmente i raggi incidenti.

È chiaro che qui assumiamo come direzione di un raggio rifratto quella della tan-gente alla curva che esso descrive nel mezzo rifrangente.

Nel caso attuale chiamando *n(ji, v)* l'indice di rifrangibilità nel punto *(u, v),* si avrà (art. Ili)